

ТЕНЗОРЫ КРИВИЗНЫ, РИЧЧИ, ЭЙНШТЕЙНА И ВЕЙЛЯ ВСЕЛЕННОЙ ДЕФРИЗА С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ

Денис Денисович Баврин

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

d.bavrin@g.nsu.ru, d.d.bavrin@gmail.com;

Аннотация

В статье изучается Вселенная Дефриза с положительной космологической постоянной. Вычислены тензоры кривизны, Риччи, Эйнштейна, Вейля и матрицы ковариантного и контравариантного тензоров энергии-импульса.

Ключевые слова и фразы

алгебра Ли, Вселенная Дефриза, группа Ли, левоинвариантная лоренцева метрика, тензор Вейля, тензор кривизны, тензор Риччи, тензор Эйнштейна, тензор энергии-импульса, типы Петрова.

Для цитирования

Баврин Д. Д. Тензоры кривизны, Риччи, Эйнштейна и Вейля Вселенной Дефриза с положительной космологической постоянной // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 3, С. 5-18. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-5-18

Curvature, Ricci, Einstein and Weyl tensors of Defrise Universe with a positive cosmological constant

Denis D. Bavrin

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

d.bavrin@g.nsu.ru, d.d.bavrin@gmail.com

Abstract

In this paper, Defrise Universe with a positive cosmological constant is studied. Tensors of curvature, as well as Ricci, Einstein and Weyl tensors are calculated. Matrices of covariant and contravariant energy-momentum tensors, and Petrov type are found for the Universe.

Keywords

Lie algebra, Defrise Universe, Lie group, left-invariant Lorentz metric, Weyl tensor, curvature tensor, Ricci tensor, Einstein tensor, energy-momentum tensor, Petrov types.

For citation

Bavrin D. D. Curvature, Ricci, Einstein and Weyl tensors of Defrise Universe with a positive cosmological constant // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 3, P. 5-18. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-5-18

Введение

В статье В. Н. Берестовского [1] приведены ссылки на исследования Вселенной Дефриза DU как чисто радиационного (безмассового) решения уравнений тяготения Эйнштейна; также, в [1] для этой Вселенной вычислены тензоры кривизны, Риччи, Эйнштейна и Вейля, определен тип Петрова этой Вселенной при условии отрицательности гравитационной постоянной. В данной работе теми же методами, что и в [1], исследуется Вселенная Дефриза, но уже с положительной космологической постоянной. В рассматриваемом нами случае, вследствие численных изменений в тензорах кривизны, Риччи, Эйнштейна, уже нельзя говорить о выполнении условия времениподобного схождения для причинных векторов (такой вывод можно сделать на основании Предложения 1 и Теоремы 2, доказанных в настоящей статье, и изложенного на сс. 102–104, 107–108 в [2]). В то же время слабое энергетическое условие, как и в [1], выполнено не будет. Тензор Вейля и тип Петрова Вселенной DU с положительной космологической постоянной — те же, что для Вселенной Дефриза с отрицательной космологической постоянной.

Задача о вычислении упомянутых тензоров и определении типа Петрова для Вселенной Дефриза с положительной космологической постоянной, которой посвящена работа В. Н. Берестовского [1], интересна не только в силу ее естественности, но еще и потому, что распределение, касающееся связанных с координатами пространственноподобных левоинвариантных векторных полей интегрируемо и поэтому задает некоторое слоение ранга три. Подчеркнем, что в случае Вселенной Дефриза с отрицательной космологической постоянной такое распределение неинтегрируемо, другими словами, вполне неголономно.

Для основных определений из лоренцевой геометрии применительно к общей теории относительности см. [3]. Здесь приведем лишь ключевые определения, относящиеся к результатам настоящей статьи.

Определение 1. *Лоренцевым n -мерным ($n \geq 2$) многообразием называется пара (M, g) , состоящая из n -мерного гладкого паракомпактного многообразия M и введенной в каждом касательном пространстве $T_x M$, $x \in M$, невырожденной билинейной формы $g|_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ с сигнатурой $(+, +, \dots, +, -)$.*

Определение 2. *Ненулевой вектор $v \in TM$ называется времениподобным (соотв., непространственноподобным (то же, что причинным), изотропным, пространственноподобным), если $g(v, v) < 0$ (соотв., ≤ 0 , $= 0$, > 0).*

Сходным образом определяется *времениподобное векторное поле* $X : M \rightarrow TM$.

Определение 3. *Если на лоренцевом многообразии M существует времениподобное векторное поле X , то M называется ориентируемым во времени посредством поля X . Лоренцево многообразие вместе с фиксированной ориентацией во времени называется *пространством-временем*.*

Определение 4. *Времениподобное поле X разбивает все непространственноподобные векторы на два непересекающихся класса: векторов, направленных в будущее, и векторов, направленных в прошлое. Именно, непространственноподобный вектор $v \in TM$ называется направленным в будущее (соотв., в прошлое), если $g(X(x), v) < 0$ (соотв., $g(X(x), v) > 0$).*

§ 1. О Вселенной Дефриза DU

В этом разделе приведена метрика самой Вселенной Дефриза DU в случае космологической постоянной $\Lambda > 0$, описана ее просто транзитивная группа изометрий и вычислен ортонормированный базис касательных векторов к этой группе в единице и соответствующие им левоинвариантные векторные поля. Отметим, что оговоренные базис и поля отличаются от тех, что были получены в работе [1].

Как было сказано во введении, Вселенная Дефриза DU была впервые введена в [4] в 1969 г. как решение уравнений тяготения Эйнштейна со следующими свойствами: оно является чисто *радиационным решением* (наблюдаемым решением, в котором поле с нулевой массой покоя представляет собой излучение, целиком распространяющееся в определенном направлении; для подробностей см. [2]); оно имеет тип N Петрова (см.

Раздел 3 настоящей статьи, (32)–(33)); оно обладает шестимерной группой движений G_6 , как утверждается в [5]. В указанном источнике решение приводится в следующей форме (12.6):

$$ds^2 = \frac{3}{|\Lambda|y^2} \left(dx^2 + dy^2 - dv \left(du - \frac{\Lambda dv}{|\Lambda|y^2} \right) \right), \quad (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4, \quad y > 0, \quad (1)$$

где Λ — ненулевая космологическая постоянная.

В этой статье мы принимаем эту форму линейного элемента (1), полагая для простоты вычислений $\Lambda = 3 > 0$:

$$ds^2 = \frac{1}{y^2} \left(dx^2 + dy^2 - dudv + \frac{dv^2}{y^2} \right). \quad (2)$$

Опираясь непосредственно на вид метрики (2), выпишем все ненулевые компоненты для метрического тензора g_{ij} , $i, j \in 1, \dots, 4$, для метрики в координатах x, y, u, v :

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{34} = -\frac{1}{2y^2}, \quad g_{44} = \frac{1}{y^4}. \quad (3)$$

У DU есть просто транзитивная группа изометрий $G_4(x', y', v', u')$:

$$(x, y, v, u) \rightarrow (y'x + x', y'y, (y')^2v + v', u + u'), \quad (x', u', v') \in \mathbb{R}^3, \quad y' \in \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

где единица в G_4 соответствует $(0, 1, 0, 0)$. Заметим, что группу Ли G_4 можно представить в виде матричной группы.

Вследствие равенств (2) и (3), касательные векторы к G_4 в единице

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} + 2\frac{\partial}{\partial u} \right) \quad (5)$$

образуют ортонормальный базис сигнатуры $(+, +, +, -)$ в ds^2 . Вследствие (4), им соответствуют левоинвариантные векторные поля на G_4

$$X_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y^2 \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_4 = y^2 \frac{\partial}{\partial v} + 2 \frac{\partial}{\partial u}. \quad (6)$$

Для элементов (5) алгебры Ли $(\mathfrak{g}_4, [\cdot, \cdot])$ группы Ли G_4 есть только следующие (с точностью до перестановок) ненулевые скобки Ли

$$[e_2, e_1] = e_1, \quad [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 2e_3. \quad (7)$$

§ 2. Тензоры кривизны и Риччи

В данном разделе сначала приводятся основные формулы, необходимые для вычисления исходно заявленных тензоров для DU с $\Lambda > 0$. Объясняется, как происходят подстановки и где вычисления упрощаются благодаря, например, симметриям тензора кривизны или устройству полей (6). В конце раздела вычислены компоненты тензоров кривизны и Риччи.

Для векторных полей X, Y, Z на произвольном (псевдо)римановом многообразии $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ с (псевдо)скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и связностью Леви-Чивита ∇ известна формула (7) п. 3.5 в [6]:

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle).$$

В частном случае группы Ли с левоинвариантными (псевдо)метрическим тензором и векторными полями эта формула сводится к следующей

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} (\langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle). \quad (8)$$

Определение 5. Тензор кривизны в $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ вычисляется по формуле

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (9)$$

Определение 6. Мы определяем ковариантный тензор кривизны формулой

$$R(X, Y, Z, V) = \langle R(X, Y)Z, V \rangle. \quad (10)$$

Определение 7. Определение тензора Риччи в псевдоримановом многообразии:

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{trace } R(\cdot, X)Y. \quad (11)$$

В произвольном ортонормированном базисе $E_1, \dots, E_n$ (векторных полей или векторов в данной точке из M^n):

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{k=1}^n \langle E_k, E_k \rangle R(E_k, X, Y, E_k). \quad (12)$$

Определение 8. Скалярная кривизна многообразия $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ равна

$$R = \sum_{k=1}^n \langle E_k, E_k \rangle \text{Ric}(E_k, E_k). \quad (13)$$

Применим (8), подставляя вместо X, Y, Z всевозможные тройки векторных полей из набора X_1, X_2, X_3, X_4 из (6). Сразу отметим, что если X, Y, Z отличны от X_2 , то $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = 0$ вследствие (7) и (8).

Рассмотрим теперь случаи, когда $X \neq X_2 \neq Y, Z = X_2$. Получаем

$$\langle \nabla_{X_1} X_3, X_2 \rangle = \langle \nabla_{X_1} X_4, X_2 \rangle = \langle \nabla_{X_4} X_4, X_2 \rangle = 0,$$

$$\langle \nabla_{X_1} X_1, X_2 \rangle = \langle \nabla_{X_3} X_4, X_2 \rangle = 1, \quad \langle \nabla_{X_3} X_3, X_2 \rangle = 2.$$

Используя эти равенства и

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y],$$

получаем

$$\nabla_{X_1} X_3 = \nabla_{X_3} X_1 = \nabla_{X_1} X_4 = \nabla_{X_4} X_1 = \nabla_{X_4} X_4 = 0, \quad (14)$$

$$\nabla_{X_1} X_1 = \nabla_{X_3} X_4 = \nabla_{X_4} X_3 = X_2, \quad \nabla_{X_3} X_3 = 2X_2. \quad (15)$$

Ясно, что $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = 0$, если два вектора из X, Y, Z равны X_2 . Далее,

$$\langle \nabla_{X_2} X_1, X_j \rangle = \langle \nabla_{X_2} X_j, X_1 \rangle = \langle \nabla_{X_2} X_3, X_3 \rangle = \langle \nabla_{X_2} X_4, X_4 \rangle = 0,$$

$$-\langle \nabla_{X_2} X_3, X_4 \rangle = \langle \nabla_{X_2} X_4, X_3 \rangle = 1;$$

$$\nabla_{X_2} X_1 = 0, \nabla_{X_2} X_2 = 0, \nabla_{X_2} X_3 = X_4, \nabla_{X_2} X_4 = X_3, \quad (16)$$

$$\nabla_{X_1} X_2 = -X_1, \nabla_{X_3} X_2 = X_4 - 2X_3, \nabla_{X_4} X_2 = -X_3. \quad (17)$$

Применим (9) к случаю, когда X, Y, Z — векторные поля из (6).

Предположим сначала, что X, Y отличны от X_2 . Применяя (14)–(17) и учитывая здесь и в дальнейшем, что $R(X, Y) = -R(Y, X)$, выпишем только ненулевые выражения.

$$R(X_1, X_3)X_3 = -2X_1, R(X_1, X_3)X_4 = -X_1, R(X_1, X_3)X_1 = -X_4 + 2X_3, \quad (18)$$

$$R(X_1, X_4)X_1 = X_3, \quad R(X_1, X_4)X_3 = -X_1, \quad (19)$$

$$R(X_3, X_4)X_3 = X_4, \quad R(X_3, X_4)X_4 = X_3. \quad (20)$$

Предположим теперь, что одно из X, Y равно X_2 . Применяя (14)–(17), выпишем только ненулевые выражения.

$$R(X_1, X_2)X_1 = X_2, \quad R(X_1, X_2)X_2 = -X_1, \quad (21)$$

$$R(X_2, X_3)X_2 = 5X_3 - 4X_4, \quad R(X_2, X_3)X_3 = -5X_2, \quad (22)$$

$$R(X_2, X_3)X_4 = -4X_2, \quad R(X_2, X_4)X_2 = -3X_4 + 4X_3, \quad (23)$$

$$R(X_2, X_4)X_3 = -4X_2, \quad R(X_2, X_4)X_4 = -3X_2. \quad (24)$$

Выпишем ненулевые компоненты этого тензора (10) с учетом (18)–(24) и симметрий тензоров кривизны $R(X, Y) = -R(Y, X)$, $R(X, Y, Z, V) = R(Z, V, X, Y)$:

$$R(X_1, X_2, X_1, X_2) = 1, \quad R(X_1, X_3, X_1, X_4) = 1, \quad (25)$$

$$R(X_1, X_3, X_1, X_3) = 2, \quad R(X_2, X_3, X_2, X_3) = 5, \quad (26)$$

$$R(X_2, X_3, X_4, X_2) = -4, \quad R(X_4, X_2, X_4, X_2) = 3, \quad (27)$$

$$R(X_4, X_3, X_4, X_3) = -1. \quad (28)$$

Применяя (25)–(28) и (12), получаем симметричный тензор Риччи с ненулевыми компонентами, где

$$\text{Ric}(X_1, X_1) = -3, \quad \text{Ric}(X_2, X_2) = -3, \quad \text{Ric}(X_3, X_3) = -8, \quad (29)$$

$$\text{Ric}(X_3, X_4) = \text{Ric}(X_4, X_3) = -5, \quad \text{Ric}(X_4, X_4) = -2. \quad (30)$$

Из результатов вычислений (29), (30) и формулы (13) непосредственно вытекает следующая

Теорема 1. Матрица ковариантного тензора Риччи имеет вид

$$(\text{Ric}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$R = -3 - 3 - 8 + 2 = -12.$$

§ 3. Тензоры Эйнштейна и энергии-импульса

В настоящем разделе доказываются утверждения, необходимые для того, чтобы заявлять о выполнении или невыполнении слабого энергетического условия и условия времениподобного схождения (см. Введение).

Определение 9. Тензор Эйнштейна G лоренцева многообразия $(M^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ есть

$$G = \text{Ric} - \frac{1}{2} R \langle \cdot, \cdot \rangle. \quad (32)$$

Уравнение тяготения Эйнштейна имеет вид

$$G = T, \quad (33)$$

симметричный тензор T называется *тензором энергии-импульса*.

Итак, матрица квадратичной формы $G = T$ в базисе (X_1, X_2, X_3, X_4) :

$$(G) = (T) = (\text{Ric}) + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \end{pmatrix}; \quad (34)$$

У $T(\cdot, \cdot)$ сигнатура $(+, +, +, -)$, $T = 3 + 3 - 2 + 8 = 12 = -R$.

Предложение 1. Для причинного вектора X в DU,

$$-20 \leq \text{Ric}(X, X) \leq 9/8.$$

Замечание. Иными словами, Предложение 1 гласит, что тензор Риччи в рассматриваемом нами случае не является знакоопределенным.

Доказательство предложения 1. Причинный вектор в DU коллинеарен вектору

$X = X_4 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$, где $0 \leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq 1$. Вследствие (31),

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) &= -3\alpha^2 - 3\beta^2 - 8\gamma^2 - 10\gamma - 2 = \\ &= -3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 5(\gamma + 1)^2 + 3. \end{aligned}$$

При $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$, $\text{Ric}(X, X)$ принимает минимальное значение равное -20 . При $\alpha = \beta = 0, \gamma = -5/8$, $\text{Ric}(X, X)$ принимает максимальное значение равное $9/8$. $\square$

Предложение 2. Для изотропного вектора X в DU выполнено неравенство: $T(X, X) \leq 0$; для всевозможных времениподобных векторов X в DU выполнено неравенство: $T(X, X) < 0$.

Доказательство предложения 2. Каждый причинный вектор в DU коллинеарен вектору вида $X = X_4 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$, где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, если X — изотропный вектор; и $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 1$, если X — времениподобный вектор. Вследствие (34), для изотропного вектора X имеем:

$$T(X, X) = 3\alpha^2 + 3\beta^2 - 2\gamma^2 - 10\gamma - 8 = -5\gamma^2 - 10\gamma - 5 = -5(\gamma + 1)^2 \leq 0.$$

Пусть $X = X_4 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$, $0 < \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 1$. Тогда $T(X, X) = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 5(\gamma + 1)^2 - 3 < -5(\gamma + 1)^2 < 0$. $\square$

Теорема 2. Контравариантный тензор энергии-импульса в базисе

$$(X_1, X_2, -\sqrt{5}X_3, \sqrt{5}X_4)$$

имеет тип II при $p_1 = p_2 = 3, \nu = -1, \varkappa = -3/5$.

Замечание. Не будем вдаваться в подробности физических обстоятельств рассматриваемой ситуации — их можно найти в книге [2] (начало п. 4.3). Там же, для выяснения смысла слабого энергетического условия, авторы классифицируют алгебраически канонические формы матрицы тензора энергии-импульса в зависимости от того, какие у него собственные векторы (пространственноподобные, изотропные и т. д.). Авторы отмечают, что канонических форм всего четыре.

Каноническая форма $(\bar{T})$ типа II имеет следующий вид (в некотором, не обязательно ортонормированном, базисе E_1, E_2, E_3, E_4 , причем E_1, E_2, E_3 — пространственноподобные векторы, E_4 — времениподобный вектор):

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu - \varkappa & \nu \\ 0 & 0 & \nu & \nu + \varkappa \end{pmatrix}, \quad \nu = \pm 1.$$

Единственный наблюдаемый физический случай, соответствующий типу II, имеет место, опять же согласно [2], лишь когда $p_1 = p_2 = \varkappa = 0$; этот случай описывается авторами так. «Безмассовое поле представляет собой излучение, целиком распространяющееся в направлении двукратного собственного вектора $E_3 + E_4$.»

Ключевая цитата из [2], в которой связываются слабое энергетическое условие и каноническая форма матрицы тензора энергии-импульса: «Для типа II слабое энергетическое условие будет выполнено, если $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \varkappa > 0, \nu = 1$.»

Отметим, что не стоит путать классификационные типы I–IV тензора энергии-импульса из [2] с типами Петрова, классифицирующими тензор конформной кривизны (тензор Вейля).

Доказательство теоремы 2. Вычислим матрицу $(\bar{T})$ при этих данных. Пусть g — матрица метрического тензора в данном новом базисе. Тогда

$$(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad (g)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix},$$

Матрица тезора T в заданном базисе, участвующем в формулировке теоремы, равна

$$(T_1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 25 \\ 0 & 0 & 25 & -40 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
(\bar{T}) &= (g)^{-1}(T_1)(g)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -8/5 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \varkappa & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 + \varkappa \end{pmatrix}, \quad \varkappa = -\frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

□

Замечание. Физический смысл параметров p_1, p_2 (из Теоремы 2 здесь), вводимых в [2] (п. 4.3, сс. 102–104) для определения типа (канонической формы) матрицы тензора энергии-импульса, поясняется авторами указанной монографии; однако параметр $\varkappa$, появляющийся там же, остается без явных пояснений.

§ 4. Тензор Вейля

Здесь, как в работе В. Н. Берестовского [1], вычисляются компоненты тензора Вейля W для DU с $\Lambda > 0$. На основании вычислений делается вывод, что тензор Вейля совпадает с оным в случае $\Lambda < 0$.

Многообразие $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ является конформно плоским тогда и только тогда, когда его *тензор конформной кривизны Вейля* W тождественно равен нулю (см. [8]). В [2] доказано, что тензор Вейля W конформно-инвариантен. Точнее, если $\phi : M \rightarrow N$ — конформное отображение псевдоримановых многообразий с множителем k^2 , $k(x) > 0$, $x \in M$, то для любых векторных полей X, Y, Z, V на M ,

$$W(d\phi(X), d\phi(Y), d\phi(Z), d\phi(V)) = k^2 W(X, Y, Z, V).$$

Из формулы в начале с. 53 из [2], с учетом приведенных определений и обозначений, нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned}
W(X, Y, Z, V) &= R(X, Y, Z, V) - (1/(n-2))(\langle X, V \rangle \text{Ric}(Z, Y) \\
&\quad - \langle X, Z \rangle \text{Ric}(V, Y) + \langle Y, Z \rangle \text{Ric}(V, X) - \langle Y, V \rangle \text{Ric}(Z, X)) \\
&\quad - (R/((n-1)(n-2))) (\langle X, Z \rangle \langle V, Y \rangle - \langle X, V \rangle \langle Z, Y \rangle). \quad (35)
\end{aligned}$$

В случае $n = 4$ формула (35) приобретает вид

$$\begin{aligned}
W(X, Y, Z, V) &= R(X, Y, Z, V) - (1/2)(\langle X, V \rangle \text{Ric}(Z, Y) \\
&\quad - \langle X, Z \rangle \text{Ric}(V, Y) + \langle Y, Z \rangle \text{Ric}(V, X) - \langle Y, V \rangle \text{Ric}(Z, X)) \\
&\quad - (R/6)(\langle X, Z \rangle \langle V, Y \rangle - \langle X, V \rangle \langle Z, Y \rangle). \quad (36)
\end{aligned}$$

Вычислим ненулевые компоненты W на основе (25)–(30), (36) для

$$X = X_1, \quad Y = X_2, \quad Z = X_3, \quad V = X_4. \quad (37)$$

Отметив равенства

$$\begin{aligned} W(X, Y, Z, V) &= W(Z, V, X, Y), \\ W(X, Y, Z, V) &= -W(Y, X, Z, V); \\ W(X, Y, X, Y) &= W(Z, V, Z, V) = 0, \end{aligned}$$

выпишем ненулевые компоненты тензора W :

$$W(X, Z, X, Z) = -3/2, \quad (38)$$

$$W(X, Z, X, V) = -3/2, \quad W(X, V, X, V) = -3/2, \quad (39)$$

$$W(Y, Z, Y, Z) = 3/2, \quad W(Y, Z, Y, V) = 3/2, \quad (40)$$

$$W(Y, V, Y, V) = 3/2. \quad (41)$$

§ 5. Тип Петрова Вселенной DU

В этом разделе определяется тип Петрова рассматриваемой Вселенной, и результат сопоставляется с [1].

Тип Петрова произвольного лоренцева 4-многообразия M определяется алгебраическими свойствами его тензора конформной кривизны Вейля (про сами типы Петрова см. гл. 4 в [5]; [7]; §19 в [8]; детали также описаны в работе [1]). Для этого применяется линейный эндоморфизм $\widetilde{W}$ шестимерного векторного пространства $\bigwedge^2(M_x)$ бивекторов над касательным пространством M_x пространства M в точке $x \in M$. В рассматриваемом случае, следуя Торпу [7], он задается на простых бивекторах из $\bigwedge^2(\mathfrak{g}_4)$ как

$$(\widetilde{W}(U \wedge V), E \wedge F) := W(U, V, E, F), \quad (42)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — псевдоскалярное произведение на $\bigwedge^2(\mathfrak{g}_4)$ с упорядоченным ортонормированным базисом из простых бивекторов сигнатуры $(+, +, +, -, -, -)$:

$$X \wedge Y, \quad X \wedge Z, \quad Y \wedge Z, \quad Z \wedge V, \quad V \wedge Y, \quad X \wedge V, \quad (43)$$

где $\cdot \wedge \cdot$ означает внешнее произведение векторных полей. В данном разделе, как и в предыдущем, соответствие базисных полей — как в (37).

В более подробном пояснении нуждается, по крайней мере, канонический вид матрицы $(\widetilde{W})$ в случае типа Петрова II (и его вырожденного

подтипа N). Для изучения техники (и выводов, получающихся из классификации, имеющих отношение к общей теории относительности), используемой А. З. Петровым для классификации канонических форм матрицы тензора Вейля, читателю необходимо обратиться к содержанию сс. 48–51, 55 в [5] и сс. 121–123 в [8].

Итак, матрица $(\widetilde{W})$ оператора $\widetilde{W}$ в базисе (43) вследствие его сигнатуры и (42) имеет вид

$$(\widetilde{W}) = \begin{pmatrix} M & N \\ -N & M \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где матрицы M и N те же, что и в классификационной теореме Петрова, но расположены в разных блоках (6×6) -матриц. Как раз по виду блоков и определяется тип Петрова отображения $\widetilde{W}$.

Итак, используя формулу (42), сигнатуру (43) и (38)–(41), получаем

$$\widetilde{W}(X \wedge Y) = 0, \quad \widetilde{W}(X \wedge Z) = \frac{3}{2}(X \wedge V - X \wedge Z),$$

$$\widetilde{W}(Y \wedge Z) = \frac{3}{2}(Y \wedge Z + V \wedge Y), \quad \widetilde{W}(Z \wedge V) = 0,$$

$$\widetilde{W}(X \wedge V) = \frac{3}{2}(X \wedge V - X \wedge Z), \quad \widetilde{W}(V \wedge Y) = -\frac{3}{2}(Y \wedge Z + V \wedge Y).$$

Тогда матрица оператора $(-2/3) \cdot \widetilde{W}$ в базисе (43) имеет вид (44), где

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученные в данном разделе результаты вычислений полностью совпадают с результатами Берестовского в [1]. Таким образом, в заключение, получаем следующую теорему.

Теорема 3. Вселенная DU с положительной космологической постоянной имеет (вырожденный) тип II Петрова [7]. В принятых терминах, Вселенная DU с положительной космологической постоянной имеет тип N Петрова [5].

Список литературы

1. Берестовский В. Н. О тензорах кривизны, Риччи, Эйнштейна и Вейля Вселенной Дефриза // *Сибирский математический журнал*. 2025. Т. 66, № 5. С. 818–827.

2. Хокинг С., Эллис Дж. *Крупномасштабная структура пространства-времени*. М.: Мир, 1977.
3. Бим Дж., Эрлих П. *Глобальная лоренцева геометрия*. М.: Мир, 1985.
4. Defrise L. *Groupes d'isotropie et groupes de stabilité conforme dans les espaces lorentziens.* / Thèse. Brussels: Université Libre de Bruxelles, 1969.
5. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., and Herlt Ed. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
6. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом*. М.: Мир, 1971.
7. Thorpe J. A. Curvature and the Petrov canonical forms // *Journal of Mathematical Physics*. 1969. V. 10, N 1. P. 1–7.
8. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности*. М.: Наука, 1966.

References

1. Berestovskii V. N. On the curvature, Ricci, Einstein, and Weyl tensors of the Defrise Universe // *Siberian Math. J.* 2025. V. 66, N 5. P. 1140–1148.
2. Hawking S. W., Ellis G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
3. Beem J. K., Ehrlich P. E. *Global Lorentzian Geometry* / 2nd edition. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 202. New York: Marcel Dekker, 1996.
4. Defrise L. *Groupes d'isotropie et groupes de stabilité conforme dans les espaces lorentziens* / Thèse. Brussels: Université Libre de Bruxelles, 1969.
5. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., and Herlt Ed. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
6. Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W. *Riemannsche Geometrie im Grossen.* / Lecture Notes in Mathematics, V. 55. Berlin—New York: Springer Verlag, 1968.
7. Thorpe J. A. Curvature and the Petrov canonical forms // *Journal of Mathematical Physics*. 1969. V. 10, N 1. P. 1–7.

8. Petrov A. Z. *New methods in General Relativity Theory*. Moscow: Nauka, 1966.

Информация об авторе

Денис Денисович Баврин, ассистент
SPIN 5237-4963 AuthorID: 1296152

Author Information

Denis D. Bavrin, Teaching Assistant
SPIN 5237-4963 AuthorID: 1296152

*Статья поступила в редакцию 02.07.2026;
одобрена после рецензирования 15.07.2026; принята к публикации
03.08.2026*

*The article was submitted 02.07.2026;
approved after reviewing 15.07.2026; accepted for publication 03.08.2026*